

Зайцев Є.П.

Льотна академія Національного авіаційного університету

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВІЧІ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ПІД ВПЛИВОМ ЗОНАЛЬНОГО ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМІНУ

У статті розглядається застосування розробленого наближеного аналітичного методу до вирішення крайової задачі нестационарної теплопровідності для скінченного суцільного трансверсально-ізотропного термочутливого циліндра, схильного до впливу зонального конвективно-променевого теплообміну. Процес перенесення енергії (теплоти) є одним із найважливіших напрямів сучасної науки і має велике практичне значення в розрахунках і проєктуванні ядерних реакторів, авіаційної техніки, теплообмінних апаратів різних конструкцій. Авіаційна техніка базується на використанні новітніх науково-технічних досягнень у всіх сучасних галузях знань, будучи каталізатором науково-технічного прогресу як в області фундаментальних наук (аеродинаміка і газодинаміка, механіка, фізика твердого тіла і т. д.), так і в області прикладних досліджень (матеріалознавство, приладобудування, електроніка і т. д.) Тому на сучасному етапі розвитку авіаційної техніки необхідно максимально забезпечити міцність, надійність і довговічність елементів конструкцій літального апарата, який працює в умовах високотемпературного теплообміну. На шляху вирішення цієї проблеми, переходу на більш високі режимні параметри роботи теплоенергетичного обладнання істотного значення набувають питання більш точного визначення температурних полів твердого тіла і виділення переважаючих факторів теплообміну. Отримане замкнене рішення у вигляді функціональної залежності дає змогу неперервно описувати в просторі і часі розподіл температурних полів у цьому тілі, найбільш повно й адекватно виявити вплив усіх діючих факторів на розподіл температури, знайти залежності між найважливішими параметрами, провести детальний аналіз кінетики і динаміки процесу і надалі використовувати його для розрахунку термонапруженого стану тіла. На великій кількості числових розрахунків, виконаних у середовищі Matlab, для двох випадків зонального теплового впливу в широкому діапазоні критерію Фур'є встановлені якісні впливи теплової анізотропії, термочутливості матеріалу і подвійної нелінійності на розподіл відносної температури вздовж осі в центрі і поверхні циліндра. Крім того, цей метод дає змогу використовувати його як отримання тестових рішень у процесі розрахунків складних елементів конструкцій.

Ключові слова: теплопровідність, анізотропія, термочутливість, суперпозиція, перетворення Гудмена і Кірхгофа, ряди Фур'є.

Постановка проблеми. Серед розширеної номенклатури конструкційних матеріалів, що успішно функціонують в умовах високотемпературного теплообміну (терморадіаційного, аеродинамічного, конвективно-променевого), широке застосування знаходять анізотропні матеріали, які застосовуються для деталей космічних і повітряних літальних апаратів, реактивних і ракетних двигунів. Великі градієнти температури, які виникають при цьому, вимагають у відповідній математичній постановці задачі теплопровідності обліку, як залежності теплофізичних характеристик матеріалу від температури, так і високотемпературного теплообміну з навколишнім середовищем, що робить поставлену задачу двічі нелінійною.

Тому зростає роль наближених аналітичних методів розв'язання крайових задач теплопровідності у двічі нелінійній постановці [1; 2] з урахуванням анізотропії матеріалу.

Використаний у роботі для розрахунку трансверсально-ізотропний графіт володіє унікальним набором якостей, які роблять його незамінним для задач ядерної фізики та енергетики. Графіт є гарним конструкційним матеріалом завдяки тому, що він залишається твердим аж до температур порядку 4000°C . Крім того, графіт має високу теплопровідність і теплоємність [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проведений огляд і аналіз літератури показує, що в обліку нелінійностей у задачах теплопро-

відності переважно використовують наближені аналітичні та чисельні методи [4; 5; 6; 7]. Однак серед них незначна частина робіт вирішується у двічі нелінійній постановці. Тому ця робота частково усуває цю прогалину і може слугувати критерієм оцінки достовірності чисельних рішень. Актуальність розв'язуваної задачі полягає в тому, що розробка наближеного аналітичного методу дає змогу найбільш повно й адекватно враховувати властивості матеріалу, анізотропію і високотемпературний теплообмін із навколишнім середовищем, оскільки правильно організований теплообмін є неодмінною умовою безпечної і безаварійної роботи теплових агрегатів, у тому числі теплоенергетики й авіаційної промисловості. Метою дослідження є встановлення кількісного і якісного впливу подвійної нелінійності і анізотропії на розподіл температурних полів у циліндрі при різних значеннях критерію Фур'є.

Постановка завдання. Розглянемо скінчений суцільний трансверсально-ізотропний циліндр радіуса R , який має нульову початкову температуру, вісь якого поєднана з віссю циліндричної системи координат (r, φ, z) , а її початок розташовано в центрі симетрії циліндра. По поверхні $(r = R)$ циліндр осесиметрично і зонально нагрівається конвективно-променевим середовищем із температурою T_c двома способами:

$$I. \psi_1(z, t) = T_c H(t) H(d - |z|); \quad H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

$$II. \psi_2(z, t) = T_c H(t) \left\{ H(d - z) + \sum_{i=1}^N (H(g_i + d_i - z) - H(g_i - d_i - z)) \right\},$$

а на торцях має місце конвективний теплообмін за законом Ньютона, де H – функція Хевісайда, b – половина довжини центральної зони, d_i – половина довжини зони, віддаленої від початку координат на відстані g_i . Потрібно знайти розподіл температури $T(r, z, t)$ по осі циліндра залежно від критерія Фур'є. Нестационарне температурне поле в циліндрі може бути визначено з вирішенням крайової задачі, записаної в розмірному вигляді:

$$\begin{aligned} \circ C_v(T) T_{,t} &= (\lambda_r(T) T_{,r})_{,r} + \lambda_r(T) T_{,r} / r + (\lambda_z(T) T_{,z})_{,z}, \\ (0 < r < R, |z| < l, t > 0); \\ T|_{r=0} &= 0; \quad T_{,r}|_{r=0} = 0; \\ \lambda_r(T) T_{,r}|_{r=R} &= \left\{ \alpha_1 (\psi_i(z, t) - T) + \sigma_2 (\psi_i^4(z, t) - T^4) \right\} \Big|_{r=R}; \\ \left\{ \lambda_z(T) T_{,z} - \alpha_2 T \right\} \Big|_{z=-l} &= 0; \quad \left\{ \lambda_z(T) T_{,z} + \alpha_2 T \right\} \Big|_{z=l} = 0, \bullet (1) \end{aligned}$$

де \circ і \bullet початок і кінець групи співвідношень, диференціювання показано через кому, $\sigma_2 = \varepsilon \sigma_0$ – наведений коефіцієнт теплообміну випромінюванням, ε – степінь чорноти, σ_0 – постійна Стефана-Больцмана, α_1, α_2 – коефіцієнти тепловіддачі.

Надамо поставленій задачі (1) безрозмірний вигляд щодо $\theta(\rho, \eta, Fo) = T(r, z, t) / T_c$:

$$\begin{aligned} \circ C_v^*(\theta) \theta_{,Fo} &= (\lambda_r^*(\theta) \theta_{,p})_{,p} + \\ &+ \lambda_r^*(\theta) \theta_{,p} / \rho + \kappa^2 (\lambda_z^*(\theta) \theta_{,n})_{,n}, \end{aligned}$$

$$(0 < \rho < 1, |\eta| < L, Fo > 0); \quad \theta|_{Fo=0} = 0; \quad \theta_{,p}|_{\rho=0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \lambda_r^*(\theta) \theta_{,p} \Big|_{\rho=1} &= \left\{ Bi_1 (\chi_i(\eta, Fo) - \theta) + Sk (\chi_i^4(\eta, Fo) - \theta^4) \right\} \Big|_{\rho=1}; \\ \left\{ \lambda_z^*(\theta) \theta_{,n} - Bi_2 \theta \right\} \Big|_{\eta=-L} &= 0; \quad \left\{ \lambda_z^*(\theta) \theta_{,n} + Bi_2 \theta \right\} \Big|_{\eta=L} = 0; \bullet (2) \end{aligned}$$

де теплофізичні характеристики представлені у вигляді добутку двох множників, з яких перший з індексом «нуль» розмірний і не змінюється, а другий, позначений зірочкою, безрозмірний і є функцією температури

$$\lambda_r(T) = \lambda_{r0} \lambda_r^*(\theta), \quad \lambda_z(T) = \lambda_{z0} \lambda_z^*(\theta),$$

$$C_v(T) = C_{v0} C_v^*(\theta); \quad \rho = r/R; \quad \eta = z/R; \quad L = l/R;$$

$$a = \lambda_{r0} / C_{v0}; \quad Fo = at/R^2; \quad Bi_1 = \alpha_1 R / \lambda_{r0}; \quad Bi_2 = \alpha_2 R / \lambda_{z0};$$

$$Sk = \sigma_2 R T_c^3 / \lambda_{r0}; \quad \beta = d/R; \quad \kappa^2 = \lambda_{z0} / \lambda_{r0};$$

$$\beta_i = d_i/R; \quad \delta_i = g_i/R; \quad \chi_1(\eta, Fo) = H(Fo) H(\beta - |\eta|);$$

$$\chi_2(\eta, Fo) = H(Fo) \left\{ H(\beta - |\eta|) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^N (H(\delta_i + \beta_i - |\eta|) - H(\delta_i - \beta_i - |\eta|)) \right\}.$$

Для вирішення системи (2) скористаємося методом суперпозиції [1; 8], який дає змогу лінеаризувати наведену систему. З цією метою введемо в (2) інтегральні аналоги, які є перетвореннями Гудмена і Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \circ A(\theta) &= \int_0^\theta C_v^*(\theta') d\theta', \quad B_r(\theta) = \int_0^\theta \lambda_r^*(\theta') d\theta' \\ B_z(\theta) &= \int_0^\theta \lambda_z^*(\theta') d\theta' \bullet (3) \end{aligned}$$

Використовуючи диференціальні співвідношення для переходу до нових функцій $A(\theta)_{,Fo} = C_v^*(\theta) \theta_{,Fo}$, $B_r(\theta)_{,p} = \lambda_r^*(\theta) \theta_{,p}$, $B_z(\theta)_{,p} = \lambda_z^*(\theta) \theta_{,p}$ перетворимо (2) в еквівалентний вигляд:

$$\circ A(\theta)_{,Fo} = B_r(\theta)_{,pp} + \rho^{-1} B_r(\theta)_{,p} + \kappa^2 B_z(\theta)_{,nn};$$

$$\theta(\rho, \eta, Fo) \Big|_{Fo=0} = 0; \quad \theta_{,p} \Big|_{\rho=0} = 0;$$

$$\left\{ B_z(\theta)_{,n} - Bi_2 \theta \right\} \Big|_{\eta=-L} = 0; \quad \left\{ B_z(\theta)_{,n} + Bi_2 \theta \right\} \Big|_{\eta=L} = 0;$$

$$\begin{aligned} & (B_r(\theta)_{,\rho} + (Bi_1 \cdot \theta + Sk \cdot \theta^4)) \Big|_{\rho=1} = \\ & = Bi_1 \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo). \bullet \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) функції (3) і $\theta^{(m)}$ ($m = \overline{1, 4}$) неперервні і задовольняють умовам Діріхле [9] на апріорно вибраному інтервалі $(0, \theta_p)$ (θ_p – поки невизначена постійна), а отже, їх можна представити у вигляді збіжних рядів Фур’є за синусами:

$$\begin{aligned} \circ \theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}; \\ \theta^{(k)} &= \alpha_k^{(1)} \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p}; \bullet \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \circ A(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)}; B_r(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)}; \\ B_z(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)}; \theta^m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(m)}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)}, \bullet \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \circ (a_k, b_{rk}, b_{zk}) &= \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (A(\theta), B_r(\theta), B_z(\theta)) \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p} d\theta, \\ \alpha_k^{(m)} &= \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} \theta^m \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p} d\theta, \bullet \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \circ \alpha_k^{(1)} &= \frac{2\theta_p(-1)^{k+1}}{k\pi}; \\ \alpha_k^{(4)} &= \frac{2\theta_p^4 \{(-1)^{k+1} [(k\pi)^4 - 12(k\pi)^2 + 24] + 24\}}{(k\pi)^5}; \\ \alpha_k^{(2)} &= \frac{2\theta_p^2 \{(-1)^{k+1} (k\pi)^2 - 2[(-1)^{k+1} + 1]\}}{(k\pi)^3}; \\ \alpha_k^{(3)} &= \frac{2\theta_p^3 (-1)^{k+1} [(k\pi)^2 - 6]}{(k\pi)^3}. \bullet \end{aligned} \quad (8)$$

З урахуванням (5), (6) і розкладання експоненти e^x в ряд Маклорена при $x=1$, тобто $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$, (4) переписемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \circ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,Fo} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,\rho\rho} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,\rho} + \kappa^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,\eta\eta}; \\ \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(Bi_1 + Sk \frac{\alpha_k^{(4)}}{\alpha_k^{(1)}} \right) \theta^{(k)} \right\}_{\rho=1} &= \\ = (Bi_1 \chi_i(\eta, Fo) + Sk \chi_i^4(\eta, Fo)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{(k-1)!}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \Big|_{Fo=0} &= 0; \left(\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\rho} \Big|_{\rho=0} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,\eta} - Bi_2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right\}_{\eta=L} &= 0; \\ \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}} \theta^{(k)} \right)_{,\eta} + Bi_2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right\}_{\eta=L} &= 0. \bullet \end{aligned} \quad (9)$$

Застосовуючи до (9) принцип суперпозиції [8], отримаємо сукупність задач теплопровідності:

$$\begin{aligned} \circ \theta_{,Fo_k}^{(k)} &= \theta_{,\rho\rho}^{(k)} + \rho^{-1} \theta_{,\rho}^{(k)} + \kappa_k^2 \theta_{,\eta\eta}^{(k)}; \\ \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) \Big|_{Fo_k=0} &= 0; \theta_{,\rho}^{(k)} \Big|_{\rho=0} = 0; \\ \left\{ \theta_{,\eta}^{(k)} - Bi_{2k} \theta^{(k)} \right\} \Big|_{\eta=L} &= 0; \left\{ \theta_{,\eta}^{(k)} + Bi_{2k} \theta^{(k)} \right\} \Big|_{\eta=L} = 0; \\ \left\{ \theta_{,\rho}^{(k)} + Bi_{1k} \theta^{(k)} \right\} \Big|_{\rho=1} &= M_k, \bullet \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \circ Fo_k &= \alpha_k Fo, \quad \alpha_k = b_{rk}/a_k, \quad Bi_{2k} = Bi_2 \alpha_k^{(1)}/b_{zk}, \\ Bi_{1k} &= \{Bi_1 \alpha_k^{(1)} + Sk \alpha_k^{(4)}\}/b_{rk}, \quad \kappa_k^2 = (b_{zk}/b_{rk}) \cdot \kappa^2, \\ M_k &= (Bi_1 \chi_i(\eta, Fo) + Sk \chi_i^4(\eta, Fo)) \times \\ &\times \alpha_k^{(1)}/(e b_{rk} (k-1)!) \bullet \end{aligned} \quad (11)$$

Застосуємо до системи (10) скінчене косинус перетворення Фур’є за змінною η [10; 11]

$$\bar{\theta}^{(k)}(\rho, Fo_k) = \int_0^L \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) \cdot \cos(v_{kn} \eta) d\eta,$$

де v_{kn} – корені характеристичного рівняння $tg(v_{kn} L) = Bi_{2k}/v_{kn}$.

У результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \circ \bar{\theta}_{,Fo_k}^{(k)} &= \bar{\theta}_{,\rho\rho}^{(k)} + \rho^{-1} \bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} - \kappa_k^2 v_{kn}^2 \bar{\theta}^{(k)}; \\ \bar{\theta}^{(k)}(\rho, v_{kn}, Fo_k) \Big|_{Fo_k=0} &= 0; \bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} \Big|_{\rho=0} = 0; \\ \left\{ \bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} + Bi_{1k} \bar{\theta}^{(k)} \right\} \Big|_{\rho=1} &= \bar{M}_k. \bullet \end{aligned} \quad (12)$$

Виконаємо скінчене косинус перетворення Фур’є над виразом M_k , з урахуванням функції Хевісайда і позначення $D_k = (Bi_1 + Sk) \alpha_k^{(1)}/(e \cdot b_{rk} \cdot (k-1)!)$:

$$\begin{aligned} \bar{M}_k &= \int_0^L (Bi_1 \chi_i(\eta, Fo_k) + Sk \chi_i^4(\eta, Fo_k)) \\ &\frac{\alpha_k^{(1)}}{e b_{rk} (k-1)!} \cos v_{kn} \eta d\eta = D_k H(Fo_k) \times \\ &\times \int_0^{\beta} \cos v_{kn} \eta d\eta = D_k H(Fo_k) \frac{\sin v_{kn} \beta}{v_{kn}}. \end{aligned}$$

Для $\chi_2(\eta, Fo)$ і $N=1$, отримаємо

$$\bar{M}_k = \frac{D_k H(Fo_k)}{v_{kn}} (\sin v_{kn} \beta + 2 \sin v_{kn} \beta \cos v_{kn} \delta).$$

Застосовуючи до (12) скінчене перетворення Ханкеля [10; 11], де

$$\bar{\theta}^{(k)*}(Fo_k) = \int_0^1 \rho \bar{\theta}^{(k)}(\rho, Fo_k) J_0(\mu_{ki}\rho) d\rho,$$

де μ_{ki} – додатні корені рівняння

$\mu_{ki} J_1(\mu_{ki}) - Bi_{1k} J_0(\mu_{ki}) = 0$, отримаємо таке зображення:

$$\begin{aligned} \circ \bar{\theta}_{,Fo_k}^{(k)*} + w_{ni}^{(k)} \bar{\theta}^{(k)*} &= J_0(\mu_{ki}) \bar{M}_k, \\ \bar{\theta}^{(k)*}(Fo_k) &= 0, \bullet \end{aligned} \quad (13)$$

де $w_{ni}^{(k)} = \mu_{ki}^2 + \kappa_k^2 v_{kn}^2$.

Рішення системи (13) щодо зображення має вигляд:

$$\bar{\theta}^{(k)*}(Fo_k) = D_k \cdot \bar{M}'_k \cdot \frac{1 - e^{-w_{ni}^{(k)} Fo_k}}{w_{ni}^{(k)}};$$

$$I. \bar{M}'_k = \frac{\sin(v_{kn}\beta)}{v_{kn}};$$

$$II. \bar{M}'_k = \frac{1}{v_{kn}} (\sin v_{kn}\beta + 2 \sin v_{kn}\beta \cos v_{kn}\delta).$$

Застосовуючи до (13) обернене перетворення Ханкеля $\bar{\theta}^{(k)}(\rho, Fo_k) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{ki} J_0(\mu_{ki}\rho) \bar{\theta}^{(k)*}(Fo_k)$, де

$B_{ki} = \frac{2\mu_{ki}^2}{(Bi_{1k}^2 + \mu_{ki}^2) J_0(\mu_{ki})}$, а потім обернене перетво-

рення Фур'є $\theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \cos(v_{kn}\eta) \bar{\theta}^{(k)*}$,

$A_{kn} = \frac{2(v_{kn}^2 + Bi_{2k}^2)}{L(v_{kn}^2 + Bi_{2k}^2) + Bi_{2k}^2}$, отримаємо оригінал

системи (12)

$$\theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} B_{kn} A_{ki} \times \cos(v_{kn}\eta) J_0(\mu_{ki}\rho) Q_{ni}^{(k)}, \quad (14)$$

де

$$Q_{ni}^{(k)} = D_k \cdot \bar{M}'_k \cdot \frac{1 - e^{-w_{ni}^{(k)} Fo_k}}{w_{ni}^{(k)}}.$$

Підсумовуючи (14) по k , згідно з (5), отримаємо рішення поставленої задачі (2)

$$\theta(\rho, \eta, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k), \quad (15)$$

в якому значення θ_p визначається з умови, що відносна температура циліндра, яка отримана з рішення задачі, при заданих значеннях ρ, η і $Fo \rightarrow \infty$, приймає значення θ_p . Тому θ_p визначається з рівняння

$$\theta_p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} B_{kn} A_{ki} \cos(v_{kn}\eta) J_0(\mu_{ki}\rho) R_{ni}^{(k)}, \quad (2.19)$$

$$R_{ni}^{(k)} = D_k \cdot \bar{M}'_k \cdot \frac{1}{w_{ni}^{(k)}}.$$

Частинний випадок отриманого рішення, в якому відсутній високотемпературний теплообмін із навколишнім середовищем завдяки випромінюванню і не враховується термочутливість матеріалу, збігається з точним рішенням. Надалі числові розрахунки виконані для рішення (15) в середовищі Matlab [12] з урахуванням зон I і II.

Результати обчислень із визначення температурного поля трансверсально-ізотропного циліндра, виготовленого з графіту, проаналізовано для трьох випадків залежності теплофізичних характеристик матеріалу від температури: A, B – трансверсально-ізотропний циліндр; C – ізотропний циліндр, і значеннями вхідних числових параметрів:

$$R = 0,3; \quad \varepsilon = 0,85; \quad C_{v,0} = 1647002;$$

$$C_v(T) = C_{v,0} + \delta_{c1}T + \delta_{c2}T^2; \quad \beta = 0,25;$$

$$\delta_{c1} = 5333,6, \quad \delta_{c2} = -2,5538; \quad \delta = 1,25;$$

$$A. \lambda_r(T) = \lambda_{r0} + \delta_{r1}T + \delta_{r2}T^2, \quad \lambda_{r0} = 261,35,$$

$$\delta_{r1} = -0,3452, \quad \delta_{r2} = 0,0001727;$$

$$\lambda_z(T) = \lambda_{z0} + \delta_{z1}T + \delta_{z2}T^2, \quad \lambda_{z0} = 342,41,$$

$$\delta_{z1} = -0,48267, \quad \delta_{z2} = 0,0002454; \quad K = 1,3.$$

$$B. \lambda_r(T) = \lambda_{r0} + \delta_{r1}T + \delta_{r2}T^2, \quad \lambda_{r0} = 342,41,$$

$$\delta_{r1} = -0,48267, \quad \delta_{r2} = 0,0002454;$$

$$\lambda_z(T) = \lambda_{z0} + \delta_{z1}T + \delta_{z2}T^2, \quad \lambda_{z0} = 261,35,$$

$$\delta_{z1} = -0,3452, \quad \delta_{z2} = 0,0001727; \quad K = 0,76.$$

$$C. \lambda_r(T) = \lambda_{r0} + \delta_{r1}T + \delta_{r2}T^2, \quad \lambda_{r0} = 261,35,$$

$$\delta_{r1} = -0,3452, \quad \delta_{r2} = 0,0001727;$$

$$\lambda_z(T) = \lambda_{z0} + \delta_{z1}T + \delta_{z2}T^2, \quad \lambda_{z0} = 261,35,$$

$$\delta_{z1} = -0,3452, \quad \delta_{z2} = 0,0001727; \quad K = 1.$$

Експериментально встановлено, що теплообмін випромінюванням є основним способом передачі тепла з температурою вище $800^\circ C$; близько 85–95% тепла передається на поверхню нагріваючих предметів випромінюванням і лише 5–15% конвекцією. Тому було вибрано два значення температури середовища в зональній області і для них – відповідні коефіцієнти тепловіддачі з урахуванням того, що в разі підвищення температури середовища коефіцієнт тепловіддачі зменшується.

$$1. T_c = 800^\circ C (A, C : Sk = 0,028,$$

$$B : Sk = 0,022), B : (Bi_1 = 0,076; Bi_2 = 0,25);$$

$A, C: [\alpha_1 = 87 (Bi_1 = 0,1), \alpha_2 = 218 (Bi_2 = 0,19)];$

2. $T_c = 1500^\circ C (A, C: Sk = 0,19, B: Sk = 0,14),$
 $B: (Bi_1 = 0,03; Bi_2 = 0,25);$

$A, C: [\alpha_1 = 35 (Bi_1 = 0,04), \alpha_2 = 218 (Bi_2 = 0,19)].$

Для розрахунку залежності температури по осі циліндра було вибрано три значення часу, для яких також розраховані відповідні критерії Фур'є:

$$T_1 = 57 (A, C: Fo = 0,1, B: Fo = 0,13);$$

$$T_1 = 576 (A, C: Fo = 1, B: Fo = 1,3);$$

$$T_1 = 5671 (A, C: Fo = 10, B: Fo = 13).$$

На наведених графіках введені такі позначення для параметрів і ліній: $\theta \div TET$; $\rho \div Ro$; $\eta \div et$; 1 – пунктирна лінія, позначає лінійне рішення; 2 – штрихпунктирна, позначає нелінійність 1-го роду; 3 – суцільна, позначає рішення з подвійною нелінійністю. Вплив нелінійностей на розподіл відносної температури аналізується на графіках у напрямі знизу вгору. Розрахунки виконані для випадків, коли довжина циліндра і зона нагріву мають такі геометричні розміри:

I. $l = 2R, \beta = 0,25$; II. $l = 2R, \beta = 0,5$.

III. $l = 3R, \beta = 0,25$.

На рисунках 1–4 видно, що в зоні нагріву має місце значне підвищення температури, причому зі збільшенням часу нагріву різниця температур між лініями 3 і 2 збільшується, що показує, який значний внесок в нагрівання циліндра надає врахування подвійної нелінійності в рішенні задачі нестационарної теплопровідності. Після зони нагріву при наблизенні до торця циліндра різниці температур ліній 1, 2 і 3 значно зменшу-

ються зі збільшенням критерія Фур'є. Оскільки екстремальні теплові навантаження на циліндр відбуваються в разі врахування подвійної нелінійності, аналізувати будемо тільки для цього випадку. Проаналізуємо різниці температур по радіусу циліндра в центрі теплового впливу, а також різницю температур у центрі площини $\eta = 0$ і торця $\eta = L$ на поверхні $\rho = 1$ циліндра (позначимо їх Δ_1, Δ_2), оскільки відповідні різниці в центрі менше попередніх. Це пов'язано з тим, що в процесі подальшого розрахунку задачі термопружності мають велике значення саме максимальні різниці температур, які мають важливі в подальшому термочинності аналізі конструкцій літальних апаратів.

На рисунках 1 і 2 наведено для анізотропії А залежності відносної температури циліндра від осевої координати при геометричних даних I і значеннях температур середовищ $T_c = 800^\circ C$ і $T_c = 1500^\circ C$ в зоні теплового впливу. На рисунках видно, що розташування ліній (2-1-3) у зоні теплового впливу на поверхні циліндра не змінюється для всього часового діапазону. У центрі циліндра, таке розташування ліній відбувається після критерія Фур'є $Fo = 1$. Оскільки зі збільшенням температури в зоні теплового впливу збільшується критерій Старка, врахування подвійної нелінійності має суттєвий вплив на розподіл температурних полів у циліндрі, що особливо видно на рисунку 2.

Наведемо значення Δ_1 і Δ_2 для двох значень критерія Фур'є $Fo = 1$ і $Fo = 10$. З цих результатів видно, що зі збільшенням температури середовища збільшуються різниці температур для роз-

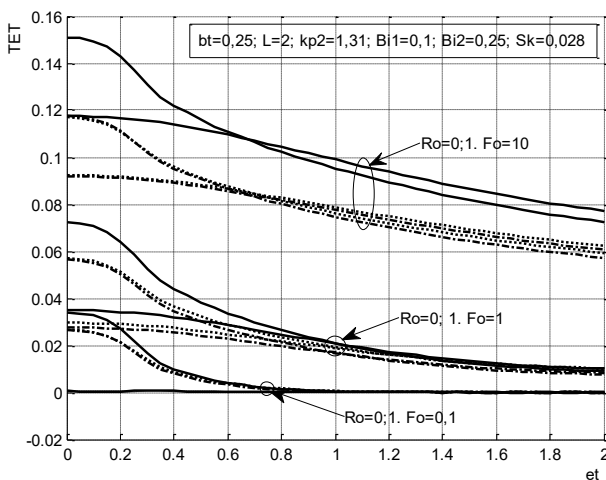


Рис. 1. Залежність θ ($\rho = 0; 1$) від критерію Fo при $T_c = 800^\circ C$, анізотропії А і геометричних характеристиках I

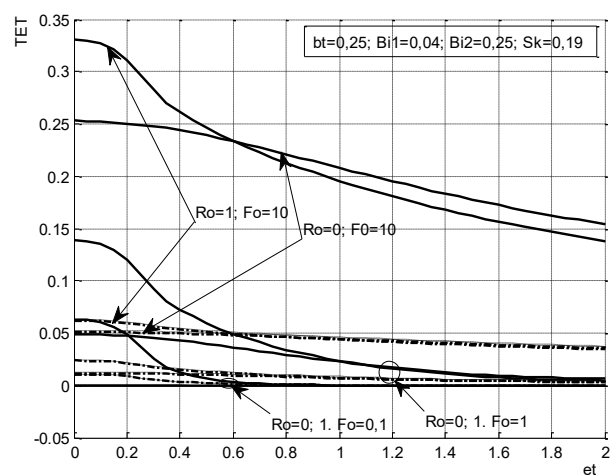


Рис. 2. Залежність θ ($\rho = 0; 1$) від критерію Fo при $T_c = 1500^\circ C$, анізотропії А і геометричних характеристиках I

глянутих критеріїв Фур'є Fo . Значення Δ_1 і Δ_2 для значень критеріїв Фур'є $Fo=1$ і $Fo=10$ будуть такими:

$$T_c = 800^\circ C. \quad Fo=1: \quad \Delta_1 = 0,036;$$

$$\Delta_2 = 0,06. \quad Fo=10: \Delta_1 = 0,039; \Delta_2 = 0,084.$$

$$T_c = 1500^\circ C. \quad Fo=1: \quad \Delta_1 = 0,073;$$

$$\Delta_2 = 0,133. \quad Fo=10: \Delta_1 = 0,077; \Delta_2 = 0,193.$$

Причому для $Fo=1$ Δ_1 збільшується в 2 рази, а Δ_2 в 2,2 рази; для $Fo=10$ Δ_1 збільшується в 2 рази, а Δ_2 в 2,3 рази.

На рисунках 3 і 4 наведено результати, аналогічні попереднім для анізотропії В. Значення Δ_1 і Δ_2 для значень критеріїв Фур'є $Fo=1,3$ і $Fo=13$ будуть такими:

$$T_c = 800^\circ C. \quad Fo=1,3: \quad \Delta_1 = 0,034;$$

$$\Delta_2 = 0,068. \quad Fo=13: \Delta_1 = 0,03; \Delta_2 = 0,09.$$

$$T_c = 1500^\circ C. \quad Fo=1,3: \quad \Delta_1 = 0,083;$$

$$\Delta_2 = 0,135. \quad Fo=13: \Delta_1 = 0,07; \Delta_2 = 0,22.$$

Для $Fo=1,3$ Δ_1 збільшується в 2,4 рази, а Δ_2 – в 2 рази; для $Fo=13$ Δ_1 збільшується в 2,3 рази, а Δ_2 – в 2,4 рази. Таким чином, за умови зростання температури середовища збільшується різниця температур Δ_1 і Δ_2 в середньому від 2 до 2,4 рази, а отже, збільшуються відповідні температурні напруги.

На рисунках 5 і 6 наведено вплив анізотропії на характер розподілу θ на поверхні і в центрі циліндра для температур середовищ $T_c = 800^\circ C$ і $T_c = 1500^\circ C$. У зоні теплового впливу для

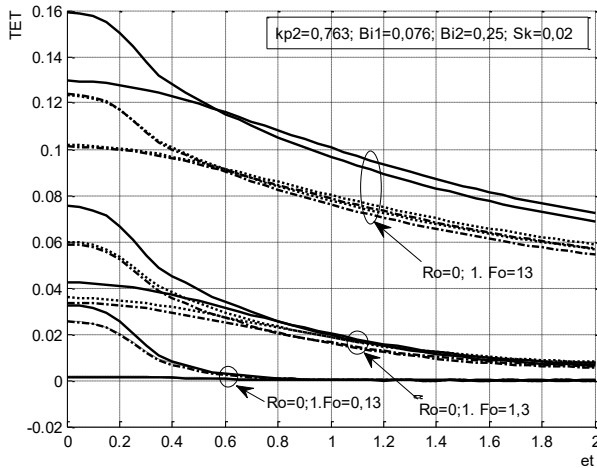


Рис. 3. Залежність θ ($\rho=0; 1$) від критерію Fo при $T_c = 800^\circ C$, анізотропії В і геометричних характеристиках І

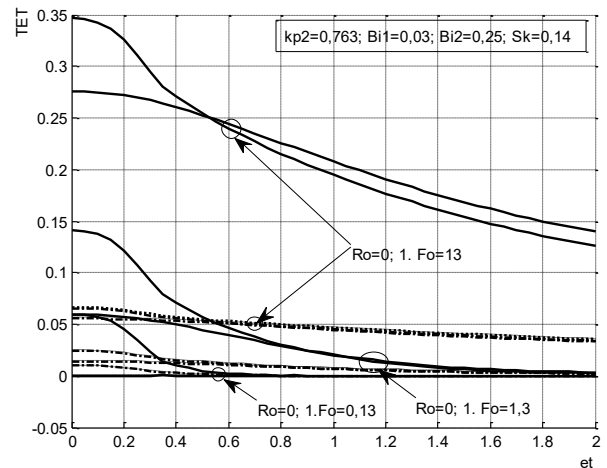


Рис. 4. Залежність θ ($\rho=0; 1$) від критерію Fo при $T_c = 1500^\circ C$, анізотропії А і геометричних характеристиках І

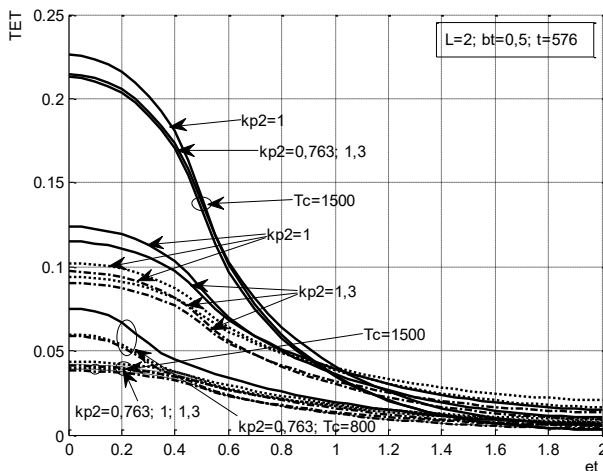


Рис. 5. Залежність θ ($\rho=1$) при $t=576$ для анізотропії А, В, С і геометричних характеристиках ІІ

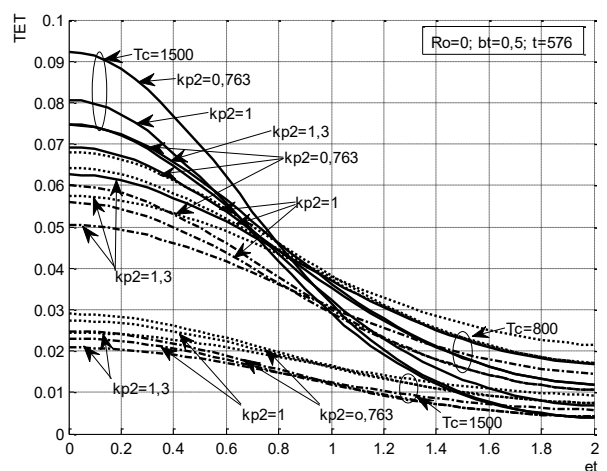


Рис. 6. Залежність θ ($\rho=0$) при $t=576$ для анізотропії А, В, С і геометричних характеристиках ІІ

подвійної нелінійності, на поверхні циліндра, як видно з рисунку 5, розташування ліній для розглянутих анізотропій одне і те ж саме, тобто (В-А-С). Лінія для ізотропного матеріалу С розташована вище порівняно з лініями для трансверсально-ізотропного матеріалу. З підвищенням температури середовища різниця температур між лініями для анізотропій А і В зменшується, прагнучи до мінімального значення, причому лінія для анізотропії А лежить вище порівняно з анізотропією В. Після зони теплового впливу розташування ліній для анізотропій якісно змінюється на (В-С-А), а різниця температур між лініями зменшується для $T_c = 800^\circ C$ і незначно зменшується для $T_c = 1500^\circ C$.

На графіку 6 наведено вплив анізотропії на характер розподілу θ в центрі циліндра для тих же температур середовищ. У цьому випадку картина розташування ліній для анізотропій якісно змінюється (А-С-В), причому різниця температур між анізотропіями збільшується. Після зони теплового впливу розташування ліній для анізотропій також якісно змінюється на (В-С-А), а різниця температур між лініями незначно зменшується для розглянутих температур середовищ.

На рисунках 7 і 8 при геометричних даних III і $N=1$ наведено осьові впливи лінійності, нелінійності 1-го роду, подвійної нелінійності, анізотропії і ізотропії на розподіл температури при $\rho=0$ і $\rho=1$ залежно від критерія Фур'є.

На рисунку 7 видно, що для анізотропії В у центрі і поверхні циліндра при температурі $T_c = 1500^\circ C$ розподіл ліній йде за напрямом (2-1-3) по всій довжині циліндра. Значення Δ_1 і Δ_2

для значень критеріїв Фур'є $Fo=1,3$ і $Fo=13$ будуть такими:

$$Fo=1,3: \Delta_1=0,036; \Delta_2=0,081.$$

$$Fo=13: \Delta_1=0,027; \Delta_2=0,173.$$

Причому для $Fo=1,3$ Δ_1 зменшується, а Δ_2 збільшується в 2,1 раза.

На рисунку 8, при $\rho=1$ вплив анізотропій у зонах нагріву буде (В-С-А), а між ними буде якісна зміна на (А-С-В).

Висновки. Врахування впливу подвійної нелінійності найбільш адекватно моделює процес високотемпературного теплообміну і тим самим дає змогу інтенсифікувати технологічний процес використання розглянутих матеріалів.

Встановлено, що за умови зростання температури середовища з $T_c = 800^\circ C$ до $T_c = 1500^\circ C$, зростають різниці температур по радіусу циліндра і центральної площини $\eta=0$ і торця $\eta=L$ на поверхні циліндра в середньому від 2 до 2,4 раза.

У зоні теплового впливу на поверхні циліндра розташування ліній одне і те ж, тобто (В-А-С). З підвищенням температури середовища, різниця температур між лініями для анізотропій А і В зменшується, прагнучи до мінімального значення, причому лінія для анізотропії А лежить вище порівняно з анізотропією В.

Для анізотропії В у центрі і поверхні циліндра при температурі $T_c = 1500^\circ C$ розподіл ліній йде за напрямом (2-1-3) по всій довжині циліндра. Значення Δ_1 для $Fo=1,3$ зменшується, а Δ_2 збільшується в 2,1 раза.

При $\rho=1$ і $T_c = 1500^\circ C$ вплив анізотропій у зонах нагріву буде (В-С-А), а між ними буде якісна зміна на (А-С-В).

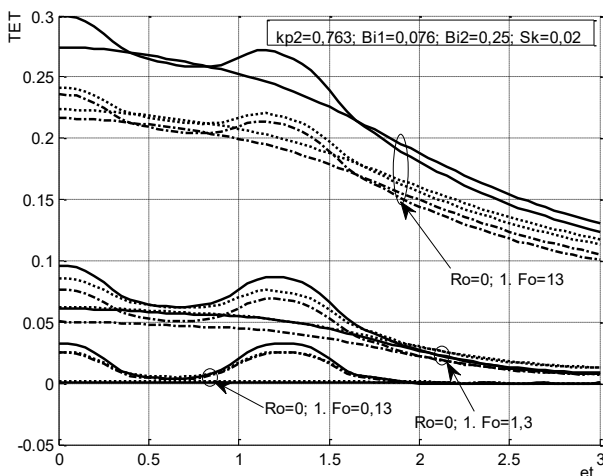


Рис. 7. Залежність θ ($\rho=0$; 1) від $t=576$ при $T_c = 1500^\circ C$, анізотропії В і геометричних характеристиках III

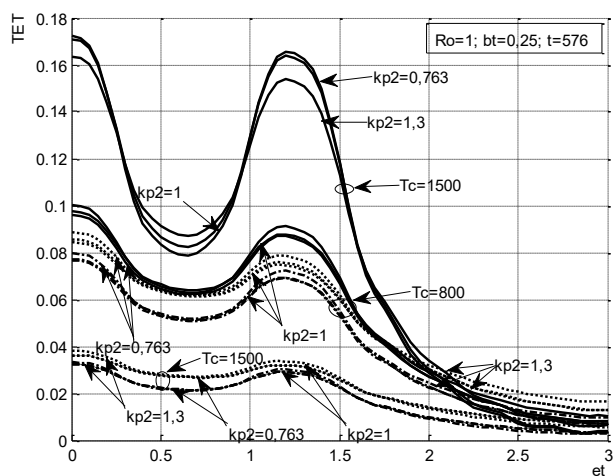


Рис. 8. Залежність θ ($\rho=1$) від $t=576$ при $T_c = 800; 1500^\circ C$, анізотропій А, В, С і геометричних характеристик III

Список літератури:

1. Зайцев Е.П. Суперпозиция основных уравнений квазистатической термоупругости анизотропных термочувствительных тел. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 1 (102). С. 22–31. URL: http://visnikkrnu.kdu.edu.ua/statti/2017_1_22-31_1-2017.pdf.
2. Зайцев Е.П. Влияние тепловой анизотропии и двойной нелинейности на температурное поле сплошного бесконечного трансверсально-изотропного цилиндра. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 4 (99). С. 23–29. URL: http://visnikkrnu.kdu.edu.ua/statti/2016_4_23-4-2016.pdf.
3. Жмуриков Е.И., Бубенков И.А., Дремов В.В. Графит в науке и ядерной технике. Новосибирск, 2013. 194 с.
4. Кушнір Р.М. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл *Термопружність термочутливих тіл* / Під ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Львів : СПОЛОМ, 2009. 409 с.
5. Попович В., Гарматій Г., Кушнір Р. Термопружний стан безмежного кругового термочутливого циліндра за умови конвективно-променевого теплообміну з довкіллям. *Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки*. 2008. Вип. 1. С. 113–120.
6. Процюк Б., Горун О. Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла. *Математические проблемы механики неоднородных структур* / Под общ. ред. И.А. Луковского, Г.С. Кита, Р.М. Кушніра. Львов : Ин-т прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2014. С. 148–150.
7. Кудинов В.А., Ларгина Е.В. Получение аналитических решений задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки*. 2011. № 2. С. 186–192.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие. Москва : Наука, 1972. 735 с.
9. Толстов Г.П. Ряды Фурье. Москва : Наука, 1980. 384 с.
10. Ozisik M. Necati Heat conduction. Department of Mechanical and aerospace engineer. North Carolina State University, Raleigh, New York, 1980. 687 p.
11. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел : учеб. пособие. 2-е изд. Москва : Высшая школа, 1985. 480 с.
12. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7: программирование, численные методы. Санкт-Петербург : БХВ. Петербург, 2005. 752 с.

Zaytsev E.P. MATHEMATICAL MODELING OF A DOUBLY NONLINEAR PROBLEM OF UNSTEADY HEAT CONDUCTION OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC THERMOSENSITIVE CYLINDER UNDER THE IMPACT OF THE ZONAL HIGH-TEMPERATURE HEAT TRANSFER

The article considers the application of the developed approximate analytical method to the solution of the boundary value problem of nonstationary thermal conductivity for a finite continuous transversely isotropic thermosensitive cylinder subject to the influence of zonal convective-radiant heat transfer. The process of energy (heat) transfer is one of the most important areas of modern science and is of great practical importance in the calculation and design of nuclear reactors, aircraft, heat exchangers of various designs. Aviation technology is based on the use of the latest scientific and technical advances in all modern fields of knowledge, as a catalyst for scientific and technological progress in the basic sciences (aerodynamics and gas dynamics, mechanics, solid state physics, etc.) and in applied research (materials science, instrument making, electronics, etc.) Therefore, at the present stage of development of aviation equipment must maximize the strength, reliability and durability of structural elements of the aircraft, which operates under conditions of high-temperature heat transfer. On the way to solving this problem, the transition to higher operating parameters of thermal equipment, it is important to more accurately determine the temperature fields of a solid body and identify the predominant factors of heat transfer. The obtained closed solution in the form of functional dependence, allows to continuously describe in space and time the distribution of temperature fields in a given body, to most fully and adequately identify the influence of all operating factors on temperature distribution, to find dependencies between the most important parameters. then use it to calculate the thermal stress of the body. A large number of numerical calculations performed in the Matlab medium, for two cases of zonal thermal influence in a wide range of Fourier criteria, found qualitative effects of thermal anisotropy, thermal sensitivity of the material and double nonlinearity on the relative temperature distribution along the center and surface of the cylinder. In addition, this method allows you to use it as a test solution for the calculation of complex structural elements.

Key words: thermal conductivity, anisotropy, thermal sensitivity, superposition, Goodman and Kirchhoff transformations, Fourier series.